第９講　数学Ⅱの微分積分

35　α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき以下の問に答えよ．

(1)　α，β の値を求めよ．

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36　実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか．a の値によって分類せよ．

《11 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

37　xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38　t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く．

⑴　接線がちょうど１本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

⑵　t が⑴で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C に引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる範囲を求めよ．

《14 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　数学Ⅱの微分積分

35　α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき以下の問に答えよ．

(1)　α，β の値を求めよ．

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

《13 京大・文系》

【答】 (1)　$\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=2$　　(2)　$\dfrac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$

【解説】 (1)　$\mathrm{A}(0,\ 3)$ とする．$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が P を通るので

$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta$　　$\therefore$　$\beta=\sqrt{3}\alpha-1$

$y'=-\dfrac{2}{3}x+\alpha$ に $x=\sqrt{3}$ を代入すると $y'=\alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より P における接線の方向ベクトルは $\vec{l}=\left(1,\ \alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ とおけるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{l}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{l}=(\sqrt{3},\ -3)\cdot\left(1,\ \alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-3\alpha+3\sqrt{3}=0$．よって $\boldsymbol{\alpha=\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{\beta=2}$

(2)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\sqrt{3}x-2$ より求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(-\frac{1}{3}x^2+\sqrt{3}x-2\right)\right\}dx-\left\{(2\sqrt{3})^2\pi\times\frac{1}{12}-\frac{3\times\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36 実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか．a の値によって分類せよ．

《11 京大・文系》

【答】 $\begin{cases} 1 & \left(a<\frac{50}{27},\ a>2 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a=\frac{50}{27},\ 2 \text{ のとき}\right) \\ 3 & \left(\frac{50}{27}<a<2 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

【解説】 $x^3-4x^2+6x=x+a \iff x^3-4x^2+5x=a$ より $f(x)=x^3-4x^2+5x$ とおくとき，$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数を考えればよい．

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

となるので，求める個数は $\begin{cases} \mathbf{1} & \left(\boldsymbol{a<\frac{50}{27},\ a>2} \text{ のとき}\right) \\ \mathbf{2} & \left(\boldsymbol{a=\frac{50}{27},\ 2} \text{ のとき}\right) \\ \mathbf{3} & \left(\boldsymbol{\frac{50}{27}<a<2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

37 xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

《11 京大・理系》

【答】 $\frac{208}{27}$

【解説】 $\left(\frac{3}{4}x^2-3\right)-2=x$ かつ $\frac{3}{4}x^2-3\geqq 0$ より

$(3x-10)(x+2)=0$ かつ $x\leqq -2$，$x\geqq 2$　　∴　$x=-2$，$\frac{10}{3}$

$-\left(\frac{3}{4}x^2-3\right)-2=x$ かつ $\frac{3}{4}x^2-3<0$ より

$(3x-2)(x+2)=0$ かつ $-2<x<2$　　∴　$x=\frac{2}{3}$

よって求める面積は

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)-x\right\}dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left\{x-\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)\right\}dx+\int_{2}^{\frac{10}{3}}\left\{x-\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{3}{4}x^2+x-1\right)dx+\int_{2}^{\frac{10}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+x+5\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right]_{\frac{2}{3}}^{2}+\left[-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{2}^{\frac{10}{3}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{208}{27}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 tを実数とする．$y=x^3-x$のグラフCへ点$\mathrm{P}(1,\ t)$から接線を引く． (1) 接線がちょうど１本だけ引けるようなtの範囲を求めよ． (2) tが(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$からCに引いた接線とCで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする．$S(t)$の取りうる範囲を求めよ． 《14京大・文系》

【答】 (1) $t<-1,\ t>0$　(2) $S(t)>\dfrac{27}{64}$

【解説】 (1) C上の点$(u,\ u^3-u)$におけるCの接線は$y'=3x^2-1$より

$y=(3u^2-1)(x-u)+u^3-u$　∴ $y=(3u^2-1)x-2u^3$となり，この接線がPを通るので

$t=(3u^2-1)\cdot 1-2u^3$　∴ $t=-2u^3+3u^2-1$となる．

これをuの方程式とみて，異なる実数解uの個数がただ１つだけとなるようなものを考えればよい．

ここで$-2u^3+3u^2-1=f(u)$とおくと，$f'(u)=-6u^2+6u=-6u(u-1)$より$f(u)$の増減は

u	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(u)$	↘	-1	↗	0	↘

となるので，求めるtの範囲は$\boldsymbol{t<-1,\ t>0}$.

(2)
$$t=-2u^3+3u^2-1 \iff 2u^3-3u^2+t+1=0$$
のただ１つの実数解をαとする．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-1$と$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$であることと$f(u)$の増減，そして$t<-1,\ t>0$より$\alpha$は$\alpha<-\dfrac{1}{2},\ \alpha>\dfrac{3}{2}$であることがわかる．

$x=\alpha$におけるCの接線は(1)より$y=(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3$となり，この接線と$y=x^3-x$より
$$x^3-x=(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3 \iff (x-\alpha)^2(x+2\alpha)=0 \qquad \therefore\ x=-2\alpha,\ \alpha$$
と交点のx座標が求まる．

(I) $\alpha<-\dfrac{1}{2}$のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{-2\alpha}\{(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3-(x^3-x)\}dx \\ &= \int_{\alpha}^{-2\alpha}(-x^3+3\alpha^2x-2\alpha^3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}\alpha^2x^2-2\alpha^3x\right]_{\alpha}^{-2\alpha} = \frac{27}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

となるので，$S(t)>\dfrac{27}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{27}{64}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　$\alpha>\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-2\alpha}^{\alpha}\{(x^3-x)-((3\alpha^2-1)x-2\alpha^3)\}dx \\ &= \int_{-2\alpha}^{\alpha}(x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}\alpha^2x^2+2\alpha^3x\right]_{-2\alpha}^{\alpha} = \frac{27}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

となるので，$S(t)>\dfrac{27}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{2187}{64}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より求める範囲は $\boldsymbol{S(t)>\dfrac{27}{64}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。